EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….086**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

Se consideră dreapta $(d): 3x+2y-1=0$ şi punctele $A(1,-1)$, $B(-1,1)$, $C(-1,2)$.

(4p) **a)** Să se precizeze care dintre punctele *A*, *B*, *C* nu sunt situate pe dreapta (d).

(4p) **b)** Să se calculeze aria triunghiului *ABC*.

(4p) **c)** Să se calculeze perimetrul triunghiului *ABC*.

(4p) **d)** Să se calculeze distanța de la punctul *B* la dreapta $3x+2y-1=0$.

(2p) **e)** Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\overrightarrow{AB}=-2\vec{i}+2\vec{j}$ şi $\overrightarrow{AC}=-2\vec{i}+3\vec{j}$.

(2p) **f)** Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât dreapta $y=mx+n$ să treacă prin punctul *B* şi să fie perpendiculară pe dreapta *d*.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze probabilitatea ca un element al mulțimii $\{-\sqrt{2},-1,0,1,\sqrt{2}\}$ să fie situat în intervalul $(-1,1)$.

(3p) **b)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}_4$ ecuația $\hat{x}^2+\hat{3}\hat{x}+\hat{2}=\hat{0}$.

(3p) **c)** Să se calculeze determinantul matricei $A=\begin{pmatrix}\sin x & \cos x\\ \cos x & -\sin x\end{pmatrix}$, pentru $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Ştiind că $\ln 3=a$ şi $\ln 2=b$, să se arate că $\log_2 3=\dfrac{a}{b}$.

(3p) **e)** Să se arate că numărul $z=1-i$ verifică egalitatea $z^3=2(z^2-z)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2+2^{-x}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 \dfrac{x^2}{x^3+13}\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $I_3, O_3, A, B \in M_3(C)$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi funcţia $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, cu $f(x) = \det(B - xI_3)$, având forma algebrică

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (cu\ \ a, b, c, d \in \mathbf{C})$.

Considerăm cunoscut că $f(B) = aB^3 + bB^2 + cB + dI_3 = O_3$.

(4p) **a)** Să se determine matricea A^2.

(4p) **b)** Să se arate că pentru orice $z \in \mathbf{C}$, determinantul matricei $X(z) = I_3 + zA$ este egal cu 1.

(4p) **c)** Să se demonstreze că $I_3 = (I_3 + A)(I_3 - A + A^2)$.

(2p) **d)** Să se arate că matricea $X(1) = I_3 + A$ este inversabilă şi să se precizeze inversa sa.

(2p) **e)** Să se determine o matrice $B \neq O_3$ pentru care $AB = O_3$.

(2p) **f)** Să se arate că matricea $X = I_3 + nzA + \dfrac{n(n-1)}{2} z^2 A^2$ este inversabilă $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$, $\forall\, z \in \mathbf{C}$.

(2p) **g)** Să se arate că, dacă $B \in M_3(\mathbf{C})$ şi $\det(I_3 + zB) = 1$ pentru orice $z \in \mathbf{C}$, atunci $B^3 = O_3$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcţiile $f : \mathbf{R} \to \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$g(x) = f(x+1) - f(x) - f\left(\dfrac{1}{1 + x + x^2}\right)$ şi şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu termenul general

$a_n = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+1+1^2} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+2+2^2} + \ldots + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+n+n^2}$, $\quad n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se determine $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se arate că $g'(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se arate că $g(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

(2p) **d)** Să se arate că $\displaystyle\int_x^{x+1} \frac{1}{t^2+1}\, dt = \operatorname{arctg}\frac{1}{1+x+x^2}$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

(2p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg} x\right)$.

(2p) **f)** Să se arate că $a_n = \operatorname{arctg}(n+1) - \dfrac{\pi}{4}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+1+1^2} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+2+2^2} + \ldots + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+n+n^2}\right)$.